Study Notes

Past Papers

Date Sheets

Gazettes

Guess Papers

Pairing Schemes

9th Class Mathematics Solved Notes Unit 2

Unit-2: Real and Complex Numbers Solution Solved Notes

سلیبس ریاضی نہم سائنس گروپ

	اپریل	مئی / جون (جزوی)	(جزوی) اگست / ستمبر	اکتوبر	نومبر	دسمبر	جنوری	فروری	مارچ
جنرل ریاضی	یونٹ نمبر: 1 قالب اور قالبوں کا مقطع ٹیکسٹ بک صفحہ 1 تا 36	یونٹ نمبر: 2 - 3 حقیقی اور غیر حقیقی (کمپلیکس) اعداد اور لوگارتھم ٹیکسٹ بک صفحہ 37 تا 88	یونٹ نمبر: 4-6 الجبری جملے اور الجبری کلیے تا الجبری جملوں کا ذو اضعاف اقل، عاد اعظم اور جذر المربع ٹیکسٹ بک صفحہ 89 تا 156	یونٹ نمبر: 7-8 یک درجی مساواتیں اور غیر مساواتیں اور خطی یا لائن (لینئر) گراف اور اس کے مستعملات ٹیکسٹ بک صفحہ 157 تا 201	یونٹ نمبر: 9 - 10 کو آرڈینیٹ جیومیٹری کا تعارف اور متماثل مثلثان ٹیکسٹ بک صفحہ 202 تا 236	یونٹ نمبر: 11 - 14 متوازی الاضلاع اور تکونی اشکال تا نسبت اور تناسب ٹیکسٹ بک صفحہ 237 تا 284	یونٹ نمبر: 15 - 17 مسئلہ فیثا غورث تا عملی جیومیٹری۔ مثلثیں ٹیکسٹ بک صفحہ 285 تا 318	مکمل نصاب کا اعادہ	ایضاً
ریاضی (سائنس گروپ)	ریاضی (سائنس گروپ) صفحہ 5 تا 61	ریاضی (سائنس گروپ) صفحہ 62 تا 115	ریاضی (سائنس گروپ) صفحہ 116 تا 210	ریاضی (سائنس گروپ) صفحہ 211 تا 266	ریاضی (سائنس گروپ) صفحہ 267 تا 306	ریاضی (سائنس گروپ) صفحہ 307 تا 374	ریاضی (سائنس گروپ) صفحہ 375 تا 432	ایضاً	ایضاً

فہرست

یونٹ 2

حقیقی اور غیر حقیقی (کمپلیکس) اعداد

REAL AND COMPLEX NUMBERS

تعارف:

عدد کا تصور علم ریاضیات کی بنیاد ہے

قدرتی اعداد $N = \{1,2,3,..........\}$

مکمل اعداد $W = \{0,1,2,3,........\}$

صحیح اعداد $Z = \{0,\pm1,\pm2,\pm3,.........\}$

ناطق اعداد $Q = \left\{\frac{p}{q} / p , q \in Z \wedge q \neq 0\right\}$

غیر ناطق اعداد $Q' = \left\{x / x \neq \frac{p}{q}, p , q \in Z \wedge q \neq 0\right\}$

حقیقی اعداد کی تعریف:

تمام ناطق اور غیر ناطق اعداد کا سیٹ حقیقی اعداد کا سیٹ R کہلاتا ہے۔

$R = Q \cup Q'$

حل مشق 2.1

-1 مندرجہ ذیل میں سے ناطق یا غیر ناطق اعداد کی نشاندہی کریں۔

(i) $\sqrt{3}$ (ii) $\frac{1}{6}$ (iii) π (iv) $\frac{15}{2}$ (v) 7.25 (vi) $\sqrt{29}$

ناطق اعداد	غیر ناطق اعداد
(ii) $\frac{1}{6}$	(i) $\sqrt{3}$
(iv) $\frac{15}{2}$	(iii) π
(v) 7.25	(vi) $\sqrt{29}$

-2 مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو اعشاری اعداد میں تبدیل کیجیے۔

(i) $\frac{17}{25}$

حل: فرض کیا کہ

$x = \frac{17}{25}$

$x = \frac{17}{25} \times \frac{4}{4} = \frac{68}{100} = 0.68$ مخرج کو 100 بنانے کے لیے "4" سے ضرب اور تقسیم کرنے سے

(ii) $\frac{19}{4}$

حل: فرض کیا کہ $x = \frac{19}{4}$

مخرج کو 100 بنانے کے لیے "25" سے ضرب اور تقسیم کرنے سے $\frac{19}{4} \times \frac{25}{25} = \frac{475}{100} = 4.75$

(iii) $\frac{57}{8}$

حل: فرض کیا کہ $x = \frac{57}{8}$

مخرج کو 1000 بنانے کے لیے "125" سے ضرب اور تقسیم کرنے سے $x = \frac{57}{8} \times \frac{125}{125} = \frac{7125}{1000} = 7.125$

(iv) $\frac{205}{18}$

حل: فرض کیا کہ $x = \frac{205}{18}$

مخرج کو 1000 بنانے کے لیے "55.65" سے ضرب اور تقسیم کرنے سے $x = \frac{205}{18} \times \frac{55.56}{55.56} = \frac{11389.8}{1000.08}$

$= 11.3889$

(v) $\frac{5}{8}$

حل: فرض کیا کہ $x = \frac{5}{8}$

مخرج کو 1000 بنانے کے لیے "125" سے ضرب اور تقسیم کرنے سے۔ $x = \frac{5}{8} \times \frac{125}{125} = \frac{625}{1000} = 0.625$

(vi) $\frac{25}{38}$

حل: فرض کیا کہ $x = \frac{25}{38}$

مخرج کو 1000 بنانے کے لیے 263.1579 سے ضرب اور تقسیم کرنے سے

$x = \frac{25}{38} \times \frac{263.1579}{263.1579} = \frac{6578.9475}{10000} = 0.65789$

3- ذیل میں درج کیے ہوئے کون سے جملے درست ہیں یا غلط نشاندہی کریں۔

(i) $\frac{2}{3}$ ایک غیر ناطق عدد ہے..................۔ (ii) π ایک غیر ناطق عدد ہے..................۔

(iii) $\frac{1}{9}$ ایک غیر اختتام پذیر عدد ہے۔ ....

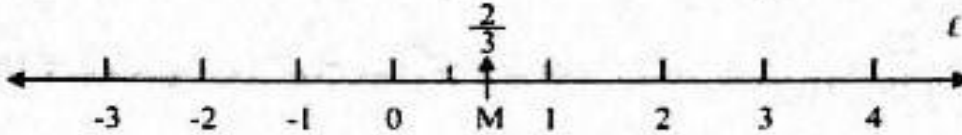
(iv) $\frac{3}{4}$ ایک اختتام پذیر عدد ہے۔ ....

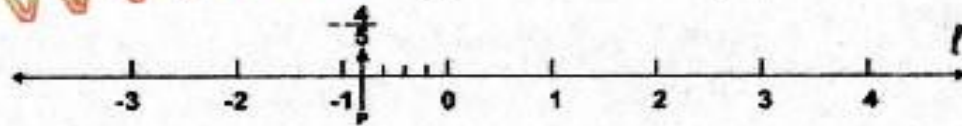
(v) $\frac{4}{5}$ ایک تکراری کسر ہے۔ ....

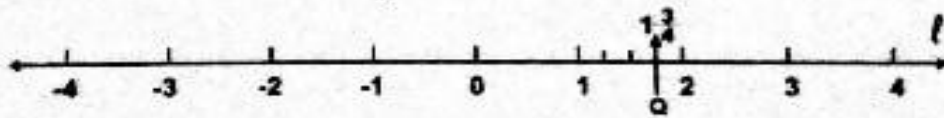
جوابات: (i) غلط (ii) درست (iii) غلط (iv) درست (v) غلط

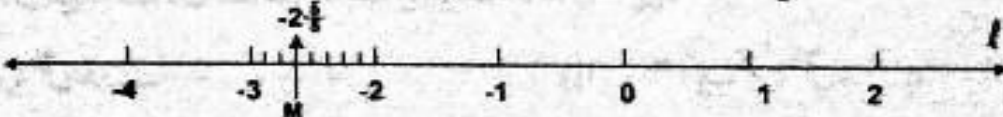
4۔ درج ذیل اعداد کو نمبر لائن کے نقاط سے ظاہر کیجیے۔

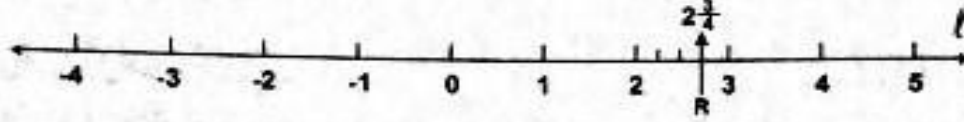
(i) $\frac{2}{3}$

حل: ناطق عدد $\frac{2}{3}$ کو نمبر لائن l پر ظاہر کرنے کی خاطر یونٹ لمبائی [0,1] کو نمبر لائن پر تین برابر حصوں میں تقسیم کیا۔ دوسرے حصہ کے اختتام پر مبدا کے دائیں طرف $\frac{2}{3}$ کو ظاہر کیا گیا۔ نقطہ M عدد $\frac{2}{3}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

(ii) $-\frac{4}{5}$

حل: ناطق عدد $-\frac{4}{5}$ کو نمبر لائن l پر ظاہر کرنے کی خاطر یونٹ لمبائی [0, −1] کو نمبر لائن پر پانچ برابر حصوں میں تقسیم کیا۔ چوتھے حصہ کے اختتام پر مبدا کے بائیں جانب $-\frac{4}{5}$ کو ظاہر کیا گیا نقطہ P $-\frac{4}{5}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

(iii) $1\frac{3}{4}$

حل: ناطق عدد $1\frac{3}{4}$ کو نمبر لائن l پر ظاہر کرنے کی خاطر یونٹ لمبائی [1, 2] کو نمبر لائن پر چار برابر حصوں میں تقسیم کیا اور تیسرے حصہ کے اختتام پر عدد 1 کے دائیں طرف $1\frac{3}{4}$ کو ظاہر کیا گیا۔ نقطہ Q $1\frac{3}{4}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

(iv) $-2\frac{5}{8}$

حل: ناطق عدد $-2\frac{5}{8}$ کو نمبر لائن l پر ظاہر کرنے کی خاطر 2− اور 3− کے درمیان فاصلہ کو آٹھ برابر حصوں میں تقسیم کیا اور چھٹے حصے کے اختتام پر 2− کے بائیں طرف $-2\frac{5}{8}$ کو ظاہر کیا گیا۔ نقطہ M $-2\frac{5}{8}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

(v) $2\frac{3}{4}$

حل: ناطق عدد $2\frac{3}{4}$ کو نمبر لائن ℓ پر ظاہر کرنے کی خاطر یونٹ لمبائی 2 اور 3 کے درمیان فاصلہ کو چار برابر حصوں میں تقسیم کیا اور تیسرے حصے کے اختتام پر 2 کے دائیں طرف $2\frac{3}{4}$ کو ظاہر کیا گیا نقطہ R $2\frac{3}{4}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

(vi) $\sqrt{5}$

حل: نقطہ $\sqrt{5}$ کو مثلث OAB بنانے سے ظاہر کرتے ہیں جبکہ $|OB| = \sqrt{5}$ اور $|OP| = \sqrt{2}$ نمبر لائن پر $\sqrt{5}$ کی مقدار کو ظاہر کرتا ہے۔ مسئلہ فیثاغورث کی رُو سے۔

$$OB = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

نقطہ O کو مرکز مان کر رداس $|OB| = \sqrt{5}$ کی لمبائی نمبر لائن پر ظاہر ہوتی ہے۔ نقطہ P نمبر لائن پر $\sqrt{5}$ نمبر کو ظاہر کرتا ہے جو مطلوبہ نقطہ ہے۔

-5 اعداد $\frac{3}{4}$ اور $\frac{5}{9}$ کے درمیان ایک ناطق عدد بتائیے۔

حل: ناطق اعداد کا اوسط بھی ناطق عدد ہوگا اور ان ناطق اعداد کے درمیان میں ہوگا۔

$$\frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{9}\right)}{2} = \frac{\left(\frac{3\times9}{4\times9}+\frac{5\times4}{9\times4}\right)}{2} = \frac{\left(\frac{27}{36}+\frac{20}{36}\right)}{2} = \frac{\left(\frac{47}{36}\right)}{2} = \frac{47}{36}\times\frac{1}{2} = \frac{47}{72}$$

-6 مندرجہ ذیل تکراری اعداد کو ناطق اعداد $\frac{p}{q}$ میں ظاہر کریں جبکہ p,q اور $q \neq 0$ صحیح اعداد ہوں۔

(i) $0.\overline{5}$ (ii) $0.\overline{13}$ (iii) $0.\overline{67}$

(i) $0.\overline{5}$

حل: فرض کیا کہ

$x = 0.\overline{5}$

جسے اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$x = 0.5555\ .....$ ________ (i)

غور کریں صرف ایک ہی عدد 5 لامتناہی طور پر دہرایا جا رہا ہے اس لیے ہم (i) کے دونوں طرف 10 سے ضرب دیں گے۔

$10x = (0.5555\ .....) \times 10$

$10x = 5.5555\ ....$ ________ (ii)

مساوات (i) کو (ii) میں سے تفریق کرنے سے

$10x - x = 5.5555... - 0.5555....$

$9x = 5$

$x = \frac{5}{9}$

پس $0.\overline{5} = \frac{5}{9}$

(ii) $0.\overline{13}$

حل: فرض کیا کہ $x = 0.\overline{13}$

جسے اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے۔ $x = 0.13131313.....$ ______ (i)

چونکہ دو اعداد کا بلاک 13 لامتناہی طور پر دہرایا جا رہا ہے اس لیے ہم 100 سے دونوں طرف ضرب دینے سے حاصل کرتے ہیں۔

$100x = (0.13131313 ....) \times 100$

$100x = 13.13131313 ....$ ______ (ii)

مساوات نمبر (i) کو (ii) میں سے تفریق کرنے سے

$100x - x = (13.13131313......) - (0.13131313 ....)$

$99x = 13$

$x = \frac{13}{99}$

پس $0.\overline{13} = \frac{13}{99}$

(iii) $0.\overline{67}$

حل: فرض کیا کہ $x = 0.\overline{67}$

جسے اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے۔ $x = 0.67676767..........$ (i)

چونکہ دو اعداد کا بلاک 67 لامتناہی طور پر دہرایا جا رہا ہے اس لیے ہم 100 سے دونوں طرف ضرب دینے سے حاصل کرتے ہیں۔

$100x = (0.67676767.........) \times 100$

$100x = 67.67676767.........$ (ii)

مساوات نمبر (i) کو (ii) میں سے تفریق کرنے سے

$100x - x = (67.67676767.........) - (0.67676767.........)$

$99x = 67$

$x = \frac{67}{99}$

پس $0.\overline{67} = \frac{67}{99}$

-1 **حقیقی اعداد کی خصوصیات بلحاظ جمع:**

خاصیت بندش $\forall a, b \in R, a + b \in R$

خاصیت مبادلہ $a + b = b + a, \forall a, b \in R$

خاصیت تلازم $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in R$

جمعی ذاتی عنصر $a + 0 = a = 0 + a, \forall a \in R$

جمعی معکوس $a + (-a) = 0 = (-a) + a$

-2 **حقیقی اعداد کی خصوصیات بلحاظ ضرب:**

خاصیت بندش $ab \in R, \forall a, b \in R$

خاصیت مبادلہ $ab = ba, \forall\ a,b \in R$

خاصیت تلازم $(ab)c = a(bc), \forall\ a,b,c \in R$

ضربی ذاتی عنصر $a.1 = a = 1.a, \forall\ a \in R$

ضربی معکوس $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$

جمعی اور تفریقی عمل پر ضربی عمل تقسیمی $\forall a,b,c = \in R$

بایاں تقسیمی قانون بالحاظ جمع اور تفریق $a(b \pm c) = ab \pm ac$

دایاں تقسیمی قانون بلحاظ جمع اور تفریق $(a \pm b)c = ac \pm bc$

حل مشق 2.2

1- مندرجہ ذیل جملوں میں حقیقی اعداد کی خاصیت کی نشاندہی کیجیے۔

(i) $a + b = b + a$ — حل: خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع

(ii) $(ab)c = a(bc)$ — حل: خاصیت تلازم بلحاظ ضرب

(iii) $7 \times 1 = 7$ — حل: ضربی ذاتی عنصر

(iv) $x > y$ یا $x = y$ یا $x < y$ — حل: ثلاثی خاصیت

(v) $ab = ba$ — حل: خاصیت مبادلہ بلحاظ ضرب

(vi) $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ — حل: تنسیخی خاصیت بلحاظ جمع

(vii) $5 + (-5) = 0$ — حل: جمعی معکوس

(viii) $7 \times \frac{1}{7} = 1$ — حل: ضربی معکوس

(ix) $a > b \Rightarrow ac > bc\ (c > 0)$ — حل: ضربی خاصیت

2- مندرجہ ذیل خالی جگہوں میں حقیقی اعداد کی استعمال کی گئی خاصیت کی نشاندہی کریں۔

$3x + 3(y - x)$
$= 3x + 3y - 3x$ ________
$= 3x - 3x + 3y$ ________
$= 0 + 3y$ ________
$= 3y$ ________

حل:

$3x + 3(y - x)$
$= 3x + 3y - 3x$ — ضربی عمل کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تفریق
$= 3x - 3x + 3y$ — خاصیت مبادلہ
$= 0 + 3y$ — جمعی معکوس
$= 3y$ — جمعی ذاتی عنصر

3- درج ذیل جملوں میں حقیقی اعداد کی اس خاصیت کا نام درج کیجیے جو استعمال کی گئی ہے۔

(i) $\sqrt{24} + 0 = \sqrt{24}$ — حل: جمعی ذاتی عنصر

(ii) $-\frac{2}{3}\left(5+\frac{7}{2}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)(5)+\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{2}\right)$

حل: ضربی عمل کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تفریق

(iii) $\pi+(-\pi)=0$

حل: جمعی معکوس

(iv) $\sqrt{3}.\sqrt{3}$ حقیقی عدد ہے

حل: خاصیت بندش بلحاظ ضرب

(v) $\left(-\frac{5}{8}\right)\left(-\frac{8}{5}\right)=1$

حل: ضربی معکوس

ریڈیکل اور ریڈیکنڈ کا تصور:

ریڈیکل $\sqrt[n]{x}$ میں $\sqrt{\ }$ ریڈیکل کا نشان ہے، x ریڈیکنڈ ہے یا بیس اور n ریڈیکل کا انڈیکس ہے۔

قوت نمائی شکل:

قوت نمائی شکل میں ریڈیکل کی جگہ قوت نما استعمال کرتے ہیں مثلاً $x=(a)^{\frac{1}{n}}$ ریڈیکل شکل $x=\sqrt[n]{a}$ کی قوت نمائی شکل ہے۔

ریڈیکلز کی خصوصیات: اگر $a,b\in R$ اور n,m مثبت صحیح اعداد ہوں تو

(i) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$ (ii) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (iii) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

(iv) $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$ (v) $\sqrt[n]{a^n}=a$

حل مشق 2.3

-1 مندرجہ ذیل میں سے ہر ریڈیکل شکل کو قوت نمائی شکل میں اور قوت نمائی شکل کو ریڈیکل شکل میں تبدیل کریں۔ تفصیل میں جانے کی ضرورت نہیں۔

(i) $\sqrt[3]{-64}$

حل: $\sqrt[3]{-64}=(-64)^{\frac{1}{3}}$

(ii) $2^{\frac{3}{5}}$

حل: $2^{\frac{3}{5}}=(2^3)^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{2^3}$

(iii) $-7^{\frac{1}{3}}$

حل: $-7^{\frac{1}{3}}=-(7)^{\frac{1}{3}}=-\sqrt[3]{7}$

(iv) $y^{-\frac{2}{3}}$

حل: $y^{-\frac{2}{3}}=(y^{-2})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{y^{-2}}$

-2 مندرجہ ذیل مساواتوں کے بارے میں غلط یا درست کی نشاندہی کیجیے۔

(i) $5^{\frac{1}{5}}=\sqrt{5}$ (ii) $2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4}$ (iii) $\sqrt{49}=\sqrt{7}$ (iv) $\sqrt[3]{x^{27}}=x^3$

حل: (i) غلط (ii) درست (iii) غلط (iv) غلط

-3 مندرجہ ذیل ریڈیکل شکلوں کو ان کی عام شکل میں تبدیل کیجیے۔

(i) $\sqrt[3]{-125}$

حل: $\sqrt[3]{-125}=(-125)^{\frac{1}{3}}=(-5^3)^{\frac{1}{3}}=-5$

(ii) $\sqrt[4]{32}$

حل: $\sqrt[4]{32}=(32)^{\frac{1}{4}}=(2\times2\times2\times2\times2)^{\frac{1}{4}}$
$=(2\times2^4)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{4}}\times(2^4)^{\frac{1}{4}}=2\sqrt[4]{2}$

(iii) $\sqrt[5]{\frac{3}{32}}$ **(iv)** $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$

حل:

$$\sqrt[5]{\frac{3}{32}} = \frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{\sqrt[5]{3}}{(2^5)^{\frac{1}{5}}} = \frac{\sqrt[5]{3}}{2}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = \left(-\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = -\frac{2}{3}$$

اساس اور قوت نما کا تصور:

قوت نمائی شکل، a^n میں 'a' اساس/ بنیاد ہے اور a,n کی قوت کا انڈیکس ہے۔

قوت نما کے قوانین:

قوت نما کے قوانین درج ذیل ہیں۔

اگر a اور b دو حقیقی اعداد ہوں اور n,m دو مثبت صحیح اعداد ہوں تو

1. $a^m . a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0.$
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n, a \neq 0$
6. $a^0 = 1 \ , \ a \neq 0$
7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ , \ a \neq 0$

حل مشق 2.4

-1 قوت نما کے قوانین کی مدد سے مندرجہ ذیل کو مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{(243)^{-\frac{2}{3}}(32)^{-\frac{1}{5}}}{\sqrt{(196)^{-1}}}$

حل:

$$\frac{(243)^{-\frac{2}{3}}(32)^{-\frac{1}{5}}}{\sqrt{(196)^{-1}}} = \frac{(3^5)^{-\frac{2}{3}} \times (2^5)^{-\frac{1}{5}}}{\sqrt{(2\times2\times7\times7)^{-1}}} = \frac{(3)^{-\frac{10}{3}} \times (2)^{-1}}{(2^2\times7^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(2^2\times7^2)^{\frac{1}{2}}}{(3)^{\frac{10}{3}}\times(2)^1} = \frac{(2^2)^{\frac{1}{2}}\times(7^2)^{\frac{1}{2}}}{3^{3+\frac{1}{3}}\times2} = \frac{2\times7}{3^3\times3^{\frac{1}{3}}\times2} = \frac{7}{27(\sqrt[3]{3})}$$

(ii) $(2x^5y^{-4})(-8x^{-3}y^2)$

حل:

$$(2x^5y^{-4})(-8x^{-3}y^2) = (2)(-8)(x^5.x^{-3})(y^{-4}.y^2)$$

$$= -16x^{5-3}y^{-4+2} = -16x^2y^{-2} = \frac{-16x^2}{y^2}$$

(iii) $\left(\frac{x^{-2}y^{-1}z^{-4}}{x^4y^{-3}z^0}\right)^{-3}$

حل:

$$\left(\frac{x^{-2}y^{-1}z^{-4}}{x^4y^{-3}z^0}\right)^{-3} = (x^{-2}.x^{-4}.y^{-1}.y^3.z^{-4}.z^0)^{-3} = (x^{-2-4}.y^{-1+3}.z^{-4+0})^{-3}$$

$$=\left(x^{-6}.y^{2}.z^{-4}\right)^{-3}=\left(x^{-6}\right)^{-3}\left(y^{2}\right)^{-3}\left(z^{-4}\right)^{-3}=x^{18}y^{-6}z^{12}=\frac{x^{18}z^{12}}{y^{6}}$$

(iv) $\dfrac{(81)^{n}\times 3^{5}-(3)^{4n-1}(243)}{\left(9^{2n}\right)\left(3^{3}\right)}$

حل:

$$\frac{(81)^{n}\times 3^{5}-(3)^{4n-1}(243)}{\left(9^{2n}\right)\left(3^{3}\right)}=\frac{\left(3^{4}\right)^{n}(3)^{5}-(3)^{4n-1}(3)^{5}}{\left(3^{2}\right)^{2n}\left(3^{3}\right)}=\frac{3^{4n+5}-3^{4n-1+5}}{3^{4n+3}}$$

$$=\frac{3^{4n+5}-3^{4n+4}}{3^{4n+3}}=\frac{3^{4n}.3^{5}-3^{4n}.3^{4}}{3^{4n}.3^{3}}=\frac{3^{4n}\left(3^{5}-3^{4}\right)}{3^{4n}.3^{3}}=\frac{3^{5}-3^{4}}{3^{3}}=\frac{3^{3}\left(3^{2}-3^{1}\right)}{3^{3}}$$

$$=3^{2}-3^{1}=9-3=6$$

-2 ثابت کیجیے کہ $\left(\dfrac{x^{a}}{x^{b}}\right)^{a+b}\times\left(\dfrac{x^{b}}{x^{c}}\right)^{b+c}\times\left(\dfrac{x^{c}}{x^{a}}\right)^{c+a}=1$

حل:

$$\text{L.H.S.}=\left(\frac{x^{a}}{x^{b}}\right)^{a+b}\times\left(\frac{x^{b}}{x^{c}}\right)^{b-c}\times\left(\frac{x^{c}}{x^{a}}\right)^{c+a}$$

$$=\left(x^{a}.x^{-b}\right)^{a+b}\times\left(x^{b}.x^{-c}\right)^{b+c}\times\left(x^{c}.x^{-a}\right)^{c+a}=\left(x^{a-b}\right)^{a+b}\times\left(x^{b-c}\right)^{b+c}\times\left(x^{c-a}\right)^{c+a}$$

$$=x^{(a-b)(a+b)}.x^{(b-c)(b+c)}.x^{(c-a)(c+a)}=x^{a^{2}-b^{2}}.x^{b^{2}-c^{2}}.x^{c^{2}-a^{2}}$$

$$=x^{a^{2}-b^{2}+b^{2}-c^{2}+c^{2}-a^{2}}=1=\text{R.H.S}$$

پس $\left(\dfrac{x^{a}}{x^{b}}\right)^{a+b}\times\left(\dfrac{x^{b}}{x^{c}}\right)^{b+c}\times\left(\dfrac{x^{c}}{x^{a}}\right)^{c-a}=1$

-3 مختصر کیجیے۔

(i) $\dfrac{2^{\frac{1}{3}}\times(27)^{\frac{1}{3}}\times(60)^{\frac{1}{2}}}{(180)^{\frac{1}{2}}\times(4)^{\frac{-1}{3}}\times(9)^{\frac{1}{4}}}$

حل:

$$\frac{2^{\frac{1}{3}}\times(27)^{\frac{1}{3}}\times(60)^{\frac{1}{2}}}{(180)^{\frac{1}{2}}\times(4)^{-\frac{1}{3}}\times(9)^{\frac{1}{4}}}=\frac{(2)^{\frac{1}{3}}\times\left(3^{3}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(2^{2}\times3\times5\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(2^{2}\times3^{2}\times5\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(2^{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\times\left(3^{2}\right)^{\frac{1}{4}}}=\frac{2^{\frac{1}{3}}\times3^{1}\times2^{1}\times3^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{1}{2}}}{2^{1}\times3^{1}\times5^{\frac{1}{2}}\times2^{-\frac{2}{3}}\times3^{\frac{1}{2}}}$$

$$=2^{\frac{1}{3}}\times2^{1}\times2^{-1}\times2^{\frac{2}{3}}\times3^{1}\times3^{\frac{1}{2}}\times3^{-1}\times3^{\frac{-1}{2}}\times5^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{-1}{2}}$$

$$=2^{\frac{1}{3}+1-1+\frac{2}{3}}\times3^{1+\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}}\times5^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}\times3^{0}\times5^{0}=2^{1}\times1\times1=2$$

(ii) $\sqrt{\dfrac{(216)^{\frac{2}{3}}\times(25)^{\frac{1}{2}}}{(.04)^{-\frac{1}{2}}}}$

حل:

$$\sqrt{\frac{(216)^{\frac{2}{3}}.(25)^{\frac{1}{2}}}{(.04)^{-\frac{1}{2}}}}=\sqrt{\frac{\left(2^{3}\times3^{3}\right)^{\frac{2}{3}}\times\left(5^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{4}{100}\right)^{-\frac{1}{2}}}}=\sqrt{\frac{\left(2^{3}\right)^{\frac{2}{3}}\times\left(3^{3}\right)^{\frac{2}{3}}\times\left(5^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{100}{4}\right)^{+\frac{1}{2}}}}$$

$$= \left(\frac{2^2\times3^2\times5^2}{(25)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(2^2)^{\frac{1}{2}}\times(3^2)^{\frac{1}{2}}\times(5^2)^{\frac{1}{2}}}{(5^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\times3\times5}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

(iii) $5^{2^3} \div (5^2)^3$

حل: $5^{2^3} \div (5^2)^3 = 5^8\times5^{-6} = 5^8\times5^{-6} = 5^{8-6} = 5^2 = 25$

(iv) $(x^3)^2 \div x^{3^2}, x \neq 0$

حل: $(x^3)^2 \div x^{3^2} = x^6 \div x^9 = x^6\times x^{-9} = x^{6-9} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

غیر حقیقی عدد کی تعریف:

ایک عدد $z = a + bi$ جس میں $a, b \in R$ اور $i = \sqrt{-1}$ ایک غیر حقیقی عدد کہلاتا ہے۔

غیر حقیقی اعداد کا سیٹ:

تمام غیر حقیقی اعداد کا سیٹ انگریزی کے حروف C سے ظاہر کرتے ہیں۔ یعنی

$$C = \{z \mid z = a + bi, a, b \in R, i = \sqrt{-1}\}$$

حل مشق 2.5

-1 قیمت معلوم کریں۔

(i) i^7

حل: $i^7 = i^6.i = (i^2)^3.i = (-1)^3 i = (-1)i = -i$

(ii) i^{50}

حل: $i^{50} = (i^2)^{25} = (-1)^{25} = -1$

(iii) i^{12}

حل: $i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$

(iv) $(-i)^8$

حل: $(-i)^8 = (-1\times i)^8 = (-1)^8\times(i)^8 = (1)(i^2)^4 = (1)(-1)^4 = (1)(1) = 1$

(v) $(-i)^5$

حل: $(-i)^5 = (-1\times i)^5 = (-1)^5\times(i)^5 = (-1)\times(i^4.i) = (-1)\times(i^2)^2\times(i)$

$= (-1)\times(-1)^2\times i = (-1)\times(1)\times i = -i$

(vi) i^{27}

حل: $i^{27} = i^{26}.i = (i^2)^{13}.i = (-1)^{13} i = (-1)i = -i$

-2 مندرجہ ذیل اعداد کے کانجوگیٹ لکھیے۔

(i) $2+3i$

حل: فرض کریں کہ $z = 2+3i$

$\bar{z} = \overline{2+3i} = 2-3i$

(ii) $3-5i$

حل: فرض کریں کہ $z = 3-5i$

$\bar{z} = \overline{3-5i} = 3+5i$

(iii) $-i$

حل: فرض کریں کہ $z = -i$

$\bar{z} = \overline{-i} = i$

(iv) $-3+4i$

حل: فرض کریں کہ $z = -3+4i$

$\bar{z} = \overline{-3+4i} = -3-4i$

(v) $-4-i$

حل: فرض کریں کہ $z = -4-i$

$\bar{z} = \overline{-4-i} = -4+i$

(vi) $i-3$

حل: فرض کریں کہ $z = i-3$

$\bar{z} = \overline{i-3} = -i-3$

-3 مندرجہ ذیل اعداد کے حقیقی اور امیجنری (imaginary) حصے لکھیے۔

(i) $1+i$

حل: فرض کریں کہ $z = 1+i$

$\Rightarrow Re(z) = 1$ اور $Im(z) = 1$

(ii) $-1+2i$

حل: فرض کریں کہ $z = -1+2i$

$\Rightarrow Re(z) = -1$ اور $Im(z) = 2$

(iii) $-3i+2$

حل: فرض کریں کہ $z = -3i+2$

$\Rightarrow Re(z) = 2$ اور $Im(z) = -3$

(iv) $-2-2i$

حل: فرض کریں کہ $z = -2-2i$

$\Rightarrow Re(z) = -2$ اور $Im(z) = -2$

(v) $-3i$

حل: فرض کریں کہ $z = 0-3i$

$\Rightarrow Re(z) = 0$ اور $Im(z) = -3$

(vi) $2+0i$

حل: فرض کریں کہ $z = 2+0i$

$\Rightarrow Re(z) = 2$ اور $Im(z) = 0$

-4 x اور y کی قیمت معلوم کریں، اگر $x+iy+1 = 4-3i$ ہو۔

$$x+iy+1 = 4-3i$$
$$x+iy = 4-1-3i$$
$$x+iy = 3-3i$$

$\Rightarrow x = 3$ اور $y = -3$

غیر حقیقی اعداد کے بنیادی عوامل:

اگر $z_1 = a+ib$ اور $z_2 = c+id$ غیر حقیقی اعداد ہوں جبکہ $a,b,c,d \in R$ ہو تو

-1 جمع کا عمل

$$z_1 + z_2 = (a+c)+(b+d)i$$

-2 ضرب کا عمل

$$z_1 z_2 = (ac-bd)+(ad+dc)i$$

-3 تفریق کا عمل

$$z_1 - z_2 = (a-c)+(b-d)i$$

-4 تقسیم کا عمل

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

حل مشق 2.6

-1 نیچے دیے ہوئے جملوں میں سے درست یا غلط کی نشاندہی کریں۔

(i) $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = 3$ (ii) $i^{73} = -i$ (iii) $i^{10} = -1$

(iv) $(-6i + i^2)$ کا کانجوگیٹ $(-1 + 6i)$ ہے۔

(v) کمپلیکس عدد $z = a + bi$ اور اس کے کانجوگیٹ کا فرق ایک حقیقی عدد ہے۔

(vi) اگر $(a - 1) - (b + 3)i = 5 + 8i$ ہو تو $a = 6$ اور $b = -11$

(vii) ایک کمپلیکس عدد کو اس کے کانجوگیٹ سے ضرب دینے سے ہمیشہ ایک مثبت حقیقی عدد حاصل ہوتا ہے۔

حل: (i) غلط (ii) غلط (iii) درست (iv) درست

(v) غلط (vi) درست (vii) درست

-2 مندرجہ ذیل کمپلیکس اعداد کو $a + bi$ کی شکل میں حاصل کریں جبکہ a اور b حقیقی اعداد ہوں۔

(i) $(2 + 3i) + (7 - 2i)$

حل: $=(2+3i)+(7-2i)=2+3i+7-2i = 9+1i=9+i$

(ii) $2(5 + 4i) - 3(7+4i)$

حل: $2(5+4i)-3(7+4i)=10+8i-21-12i=-11-4i$

(iii) $-(-3+5i)-(4+9i)$

حل: $-(-3+5i)-(4+9i)=3-5i-4-9i=-1-14i$

(iv) $2i^2 + 6i^3 + 3i^{16} - 6i^{19} + 4i^{25}$

حل:

$$= 2i^2 + 6i^2 . i + 3(i^2)^8 - 6(i^2)^9 . i + 4(i^2)^{12}.i$$
$$=2(-1)+6(-1)i+3(-1)^8-6(-1)^9 i+4(-1)^{12} i$$
$$=-2-6i+3(+1)-6(-1)i+4(1)i$$
$$=-2-6i+3+6i+4i$$
$$=3-2+6i-6i+4i$$
$$=1+4i$$

-3 مندرجہ ذیل کو $a + bi$ کی شکل میں مختصر کریں۔

(i) $(-7 + 3i)(-3 + 2i)$.

حل:

$$(-7+3i)(-3+2i) = (-7)(-3)+(-7)(2i)+(3i)(-3)+(3i)(2i)$$
$$=21-14i-9i+6i^2$$
$$=21-23i+6(-1)$$
$$=21-23i-6$$
$$=15-23i$$

(ii) $(2-\sqrt{-4})(3-\sqrt{-4})$

حل:

$$\left(2-\sqrt{-4}\right)\left(3-\sqrt{-4}\right) = (2-2i)(3-2i)$$
$$= (2)(3)+(2)(-2i)+(-2i)(3)+(-2i)(-2i)$$
$$= 6-4i-6i+4i^2$$
$$= 6-10i+4(-1)$$
$$= 6-10i-4$$
$$= 2-10i$$

(iii) $(\sqrt{5}-3i)^2$

حل:

$$\left(\sqrt{5}-3i\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2-2\left(\sqrt{5}\right)(3i)+(3i)^2$$
$$= 5-6\sqrt{5}i+9(-1)$$
$$= 5-6\sqrt{5}i-9$$
$$= -4-6\sqrt{5}i$$

(iv) $(2-3i)\,\overline{(3-2i)}$

حل:

$$(2-3i)\overline{(3-2i)} = (2-3i)(3+2i)$$
$$= (2)(3)+(2)(2i)+(-3i)(3)+(-3i)(2i)$$
$$= 6+4i-9i-6i^2$$
$$= 6-5i-6(-1)$$
$$= 6-5i+6$$
$$= 12-5i$$

-4 مندرجہ ذیل کو a + bi کی شکل میں مختصر کریں۔

(i) $\dfrac{-2}{1+i}$

حل:

$$\frac{-2}{1+i} = \frac{-2}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i} = \frac{-2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2+2i}{(1)^2-(i)^2}$$
$$= \frac{-2+2i}{1-(-1)} = \frac{-2+2i}{1+1} = \frac{-2+2i}{2}$$
$$= \frac{2(-1+i)}{2}$$
$$= -1+i$$

(ii) $\dfrac{2+3i}{4-i}$

حل:

$$\frac{2+3i}{4-i}=\frac{2+3i}{4-i}\times\frac{4+i}{4+i}=\frac{(2+3i)(4+i)}{(4-i)(4+i)}$$

$$=\frac{(2)(4)+(2)(i)+(3i)(4)+(3i)(i)}{(4)^2-(i)^2}=\frac{8+2i+12i+3i^2}{16-(-1)}$$

$$=\frac{8+14i+3(-1)}{16+1}=\frac{8+14i-3}{17}=\frac{5+14i}{17}=\frac{5}{17}+\frac{14}{17}i$$

(iii) $\dfrac{9-7i}{3+i}$

حل:

$$\frac{9-7i}{3+i}=\frac{9-7i}{3+i}\times\frac{3-i}{3-i}=\frac{(9-7i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{(9)(3)+(9)(-i)+(-7i)(3)+(-7i)(-i)}{(3)^2-(i)^2}$$

$$=\frac{27-30i-7}{10}=\frac{20-30i}{10}=\frac{20}{10}-\frac{30}{10}i=2-3i$$

(iv) $\dfrac{2-6i}{3+i}-\dfrac{4+i}{3+i}$

حل:

$$\frac{2-6i}{3+i}-\frac{4+i}{3+i}=\frac{(2-6i)-(4+i)}{3+i}=\frac{2-6i-4-i}{3+i}=\frac{-2-7i}{3+i}=\frac{-2-7i}{3+i}\times\frac{3-i}{3-i}$$

$$=\frac{(-2-7i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{(-2)(3)+(-2)(-i)+(-7i)(3)+(-7i)(-i)}{(3)^2-(i)^2}$$

$$=\frac{-6-19i-7}{9+1}=\frac{-13-19i}{10}=-\frac{13}{10}-\frac{19}{10}i$$

(v) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2$

حل:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2=\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}=\frac{(1)^2+2(1)(i)+(i)^2}{(1)^2-2(1)(i)+(i)^2}=\frac{1+2i+i^2}{1-2i+i^2}$$

$$=\frac{1+2i+(-1)}{1-2i+(-1)}=\frac{1+2i-1}{1-2i-1}=\frac{2i}{-2i}=-1$$

متبادل حل

اب

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i+i+i^2}{(1)^2-(i)^2}$$

$$=\frac{1+2i+(-1)}{1-i^2}=\frac{1+2i-1}{1-(-1)}=\frac{2i}{1+1}=\frac{2i}{2}=i$$

چنانچہ

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=(i)^2=i^2=-1=-1+0i$$

(vi) $\frac{1}{(2+3i)(1-i)}$

حل:

$$\frac{1}{(2+3i)(1-i)}=\frac{1}{(2)(1)+(3i)(-i)+(2)(-i)+(3i)(1)}$$

$$=\frac{1}{2-3i^2-2i+3i}=\frac{1}{2-3(-1)+i}=\frac{1}{2+3+i}$$

$$=\frac{1}{5+i}\times\frac{5-i}{5-i}=\frac{5-i}{(5)^2-(i)^2}=\frac{5-i}{25-i^2}$$

$$=\frac{5-i}{25-(-1)}=\frac{5-i}{25+1}=\frac{5-i}{26}=\frac{5}{26}-\frac{1}{26}i$$

-5 مندرجہ ذیل کے (a) $\bar{z}$ (b) $z+\bar{z}$ (c) $z-\bar{z}$ اور (d) $z\bar{z}$ کی قیمت معلوم کریں۔

(i) $z=-i$

حل:

(a) $z=-i$

$\bar{z}=\overline{-i}=i$

(b) $z+\bar{z}=-i+i=0$

(c) $z-\bar{z}=(-i)-(i)=-i-i=-2i$

(d) $z\bar{z}=(-i)(+i)=-i^2=-(-1)=1$

(ii) $z=2+i$

حل:

$z=2+i$

(a) $\bar{z}=\overline{2+i}=2-i$

(b) $z+\bar{z}=(2+i)+(2-i)=2+i+2-i=4$

(c) $z-\bar{z}=(2+i)-(2-i)=2+i-2+i=2i$

(d) $z\bar{z}=(2+i)(2-i)=(2)^2-(i)^2=4-i^2=4-(-1)=4+1=5$

(iii) $z=\frac{1+i}{1-i}$

حل:

$$z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1+i}\times\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i+i+i^2}{1+i-i-i^2}=\frac{1+2i-1}{1+1}=\frac{2i}{2}=i$$

(a) $\bar{z}=\bar{i}=-i$

(b) $z+\bar{z}=i+(-i)=i-i=o$

(c) $z-\bar{z}=i-(-i)=i+i=2i$

(d) $z\bar{z}=(i)(-i)=-i^2=-(-1)=1$

(iv) $z = \frac{4-3i}{2+4i}$

حل:

$$z = \frac{4-3i}{2+4i} = \frac{4-3i}{2+4i} \times \frac{2-4i}{2-4i} = \frac{(4-3i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}$$

$$= \frac{8-16i-6i+12i^2}{(2)^2-(4i)^2} = \frac{8-22i+12(-1)}{4-16i^2} = \frac{-4-22i}{4+16} = \frac{-4-22i}{20} = -\frac{4}{20} - \frac{22}{20}i = -\frac{1}{5} - \frac{11}{10}i$$

(a) $\bar{z} = \overline{-\frac{1}{5} - \frac{11}{10}i} = -\frac{1}{5} + \frac{11}{10}i$

(b) $z + \bar{z} = \left(-\frac{1}{5} - \frac{11}{10}i\right) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{11}{10}i\right) = -\frac{1}{5} - \frac{11}{10}i - \frac{1}{5} + \frac{11}{10}i = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5} = -\frac{2}{5}$

(c) $z - \bar{z} = \left(-\frac{1}{5} - \frac{11}{10}i\right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{11}{10}i\right) = -\frac{1}{5} - \frac{11}{10}i + \frac{1}{5} - \frac{11}{10}i$

$$= -\frac{11}{10}i - \frac{11}{10}i = -\frac{22}{10}i = -\frac{11}{5}i$$

(d) $z\bar{z} = \left(-\frac{1}{5} - \frac{11}{10}i\right)\left(-\frac{1}{5} + \frac{11}{10}i\right) = \frac{1}{25} - \frac{11}{50}i + \frac{11}{50}i - \frac{121}{100}i^2$

$$= \frac{1}{25} - \frac{121}{100}(-1) = \frac{1}{25} + \frac{121}{100} = \frac{4+121}{100} = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$$

-6 اگر $z = 2 + 3i$ اور $w = 5 - 4i$ تو تصدیق کریں کہ

(i) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

حل:

L. H. S. $= \overline{z+w}$

اب $z + w = (2+3i) + (5-4i) = 2 + 3i + 5 - 4i = 7 - i$

چنانچہ $\overline{z+w} = \overline{7-i} = 7 + i$ ______ (1)

R.H.S. $= \bar{z} + \bar{w}$

اب $z = 2 + 3i \Rightarrow \bar{z} = \overline{2+3i} = 2 - 3i$

$w = 5 - 4i \Rightarrow \bar{w} = \overline{5-4i} = 5 + 4i$

$\bar{z} + \bar{w} = 2 - 3i + 5 + 4i = 7 + i$ ______ (2)

پس مساوات نمبر (1) اور (2) سے ثابت ہوا کہ

$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

(ii) $\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$

L. H. S. $= \overline{z-w}$

اب $z - w = (2+3i) - (5-4i) = 2 + 3i - 5 + 4i = -3 + 7i$

چنانچہ $\overline{z-w} = \overline{-3+7i} = -3 - 7i$ ______ (1)

R.H.S. $= \bar{Z} - \bar{W}$

اب $Z = 2 + 3i \Rightarrow \bar{Z} = \overline{2+3i} = 2 - 3i$

$W = 5 - 4i \Rightarrow \bar{W} = \overline{5-4i} = 5 + 4i$

چنانچہ $\overline{Z} - \overline{W} = (2-3i) - (5+4i) = 2 - 3i - 5 - 4i = -3 - 7i$ ______ (2)

پس مساوات نمبر (1) اور (2) سے ثابت ہوا کہ $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$

(iii) $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$

حل: L. H. S. $= \overline{zw}$

اب $zw = (2+3i)(5-4i) = 10 - 8i + 15i - 12i^2$

$= 10 + 7i - 12(-1) = 10 + 7i + 12 = 22 + 7i$

چنانچہ $\overline{zw} = \overline{22 + 7i} = 22 - 7i$

R.H.S $= \overline{z}\ \overline{w}$

اب $z = 2 + 3i \Rightarrow \overline{Z} = \overline{2 + 3i} = 2 - 3i$

$w = 5 - 4i \Rightarrow \overline{W} = \overline{5 - 4i} = 5 + 4i$

چنانچہ $\overline{z}\ \overline{w} = (2-3i)(5+4i) = 10 + 8i - 15i - 12i^2$

$= 10 - 7i - 12(-1) = 10 - 7i + 12 = 22 - 7i$ ______ (2)

پس مساوات نمبر (1) اور (2) سے ثابت ہوا کہ $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$

(iv) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, w \neq 0$

حل: L.H.S $= \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$

اب $\frac{z}{w} = \frac{2+3i}{5-4i} = \frac{2+3i}{5-4i} \times \frac{5+4i}{5+4i} = \frac{(2+3i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)}$

$= \frac{10+8i+15i+12i^2}{(5)^2-(4i)^2} = \frac{10+23i+12(-1)}{25+16}$

$= \frac{10+23i-12}{41} = \frac{-2+23i}{41} = \frac{-2}{41} + \frac{23}{41}i$

چنانچہ $= \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(-\frac{2}{41} + \frac{23}{41}i\right)} = -\frac{2}{21} - \frac{23}{21}i$ ______ (1)

R.H.S $= \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

$\overline{z} = 2 + 3i \Rightarrow \overline{z} = \overline{2 + 3i} = 2 - 3i$

$w = 5 - 4i \Rightarrow \overline{w} = \overline{5 - 4i} = 5 + 4i$

$\frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \frac{2-3i}{5+4i} = \frac{2-3i}{5+4i} \times \frac{5-4i}{5-4i} = \frac{(2-3i)(5-4i)}{(5+4i)(5-4i)}$

$= \frac{10-8i-15i+12i^2}{(5)^2-(4i)^2} = \frac{10-23i+12(-1)}{25-16i^2}$

$= \frac{10-23i-12}{41} = \frac{-2-23i}{41} = -\frac{2}{41} - \frac{23}{41}i$ ______ (2)

پس مساوات نمبر (1) اور (2) سے ثابت ہوا کہ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

(v) $\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, z کا حقیقی حصہ ہے

حل: $\frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \frac{1}{2}((2+3i)+(2-3i)) = \frac{1}{2}(2+3i+2-3i)$

$= \frac{1}{2}(4) = 2 = \text{Re}(z)$

(vi) $\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$, z کا امیجری حصہ ہے

حل: $\frac{1}{2i}(z-z) = \frac{1}{2i}((2+3i)-(2-3i)) = \frac{1}{2i}(2+3i-2+3i) = \frac{1}{2i}(6i) = 3 \neq \text{Im}(z)$

7- مندرجہ ذیل مساواتوں کو x اور y میں حل کریں۔

(i) $(2-3i)(x+yi) = 4+i$

حل: $(2-3i)(x+yi) = 4+i$

$x+yi = \frac{4+i}{2-3i}$

$x+yi = \frac{4+i}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i}$

$x+yi = \frac{(4+i)(2+3i)}{(2)^2-(3i)^2}$

$x+yi = \frac{8+12i+2i+3i^2}{4-9i^2}$

$x+yi = \frac{8+14i+3(-1)}{4-9(-1)}$

$x+yi = \frac{8+14i-3}{4+9}$

$x+yi = \frac{5+14i}{13}$

$x+yi = \frac{5}{13}+\frac{14}{13}i$

$\Rightarrow x = \frac{5}{13}$ اور $y = \frac{14}{13}$

(ii) $(3-2i)(x+yi) = 2(x-2yi)+2i-1$

حل: $(3-2i)(x+yi) = 2(x-2yi)+2i-1$

$3x+3yi-2xi-2yi^2 = 2x-4yi+2i-1$

$3x+3yi-2xi-2y(-1) = (2x-1)+(2i-4yi)$

$(3x+2y)+(3y-2x)i = (2x-1)+(2-4y)i$

$\Rightarrow 3x+2y = 2x-1$ and $3y-2x = 2-4y$

$3x-2x+2y = -1$ $\qquad -2x+3y+4y = 2$

$x+2y = -1$ ______ (1) $\qquad -2x+7y = 2$ ______ (2)

(viii) ہر حقیقی نمبر .... ہے۔

(a) ایک مثبت صحیح عدد (b) ایک ناطق نمبر (c) ایک منفی صحیح عدد (d) ایک کمپلیکس نمبر

(ix) کمپلیکس نمبر $2ab(i + i^2)$ کا حقیقی حصہ .... ہے۔

(a) 2ab (b) −2ab (c) $2abi$ (d) $-2abi$

(x) کمپلیکس نمبر $-i(3i + 2)$ کا امیجری حصہ .... ہے۔

(a) −2 (b) 2 (c) 3 (d) −3

(xi) کونسا سیٹ .... بلحاظ جمع خاصیت بندش کا حامل ہے؟

(a) {0} (b) {0 , −1} (c) {0,1} (d) $\left\{1, \sqrt{2}, \frac{1}{2}\right\}$

(xii) کون سی خصوصیت .... کے استعمال سے $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \times 1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ ہے۔

(a) جمعی ذاتی عنصر (b) جمعی معکوس (c) ضربی ذاتی عنصر (d) ضربی معکوس

(xiii) اگر $z < 0$ تو .... $x < y \Rightarrow$

(a) $xz < yz$ (b) $xz > yz$ (c) $xz = yz$ (d) کوئی نہیں

(xiv) اگر $a, b \in R$ اور صرف ایک $a = b$ یا $a < b$ یا $a > b$ درست ہے۔ یہ کون سی خاصیت کہلاتی ہے۔

(a) ثلاثی (b) متعدیت (c) جمعی (d) ضربی

(xv) ایک غیر اختتامی غیر تکراری اعشاری عدد .... عدد ہے۔

(a) قدرتی عدد (b) ناطق عدد (c) غیر ناطق عدد (d) پرائم (مفرد) عدد

جوابات:

(i)	$\frac{\sqrt[3]{x^2}}{9}$	(ii)	x^{17}	(iii)	$\sqrt[3]{4^2}$	(iv)	35
(v)	$\frac{4}{5}$	(vi)	$5 - 4i$	(vii)	i	(viii)	ایک کمپلیکس نمبر
(ix)	−2ab	(x)	−2	(xi)	{0}	(xii)	ضربی ذاتی عنصر
(xii)	$xz > yz$	(xiv)	ثلاثی	(xv)	غیر ناطق عدد		

-2 مندرجہ ذیل میں سے درست یا غلط کی نشاندہی کریں۔

(i) تقسیم کا عمل حقیقی اعداد کے سیٹ R پر خاصیت تلازم نہیں رکھتا۔ ....

(ii) سیٹ W کا ہر عدد قدرتی عدد ہے۔ ....

(iii) نمبر 0.02 کا ضربی معکوس 50 ہے۔ ....

(iv) π ایک ناطق عدد ہے۔ ....

(v) ہر صحیح عدد ایک ناطق عدد ہے۔ ....

(vi) تفریق کا عمل خاصیت مبادلہ کا حامل ہے۔ ....

(vii) ہر حقیقی عدد ایک ناطق عدد ہے۔ ....

(viii) اعشاری ناطق عدد یا اختتامی عدد ہے یا تکراری۔ ....

(ix) $1.\bar{8} = 1 + \frac{8}{9}$ ....

جوابات: (i) درست (ii) غلط (iii) درست (iv) غلط (v) درست (vi) غلط (vii) غلط (viii) درست (ix) درست

-3 درج ذیل کو مختصر کیجیے۔

i) $\sqrt[4]{81y^{-12}x^{-8}}$

حل: $\sqrt[4]{81y^{-12}x^{-8}} = \left(81y^{-12}x^{-8}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(3^4y^{-12}x^{-8}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(3^4\right)^{\frac{1}{4}}\left(y^{-12}\right)^{\frac{1}{4}}\left(x^{-8}\right)^{\frac{1}{4}} = 3y^{-3}x^{-2} = \frac{3}{x^2y^3}$

ii) $\sqrt{25x^{10n}y^{8m}}$

حل: $\sqrt{25x^{10n}y^{8m}} = \left(25x^{10n}y^{8m}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(5^2x^{10n}y^{8m}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(5^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(x^{10n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(y^{8m}\right)^{\frac{1}{2}} = 5x^{5n}y^{4m}$

iii) $\left(\frac{x^3.y^4.z^5}{x^{-2}.y^{-1}.z^{-5}}\right)^{\frac{1}{5}}$

حل: $\left(\frac{x^3.y^4.z^5}{x^{-2}.y^{-1}.z^{-5}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(x^3.x^2.y^4.y^1.z^5.z^5\right)^{\frac{1}{5}}$

$= \left(x^{3+2}.y^{4+1}.z^{5+5}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(x^5.y^5.z^{10}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(x^5\right)^{\frac{1}{5}}\left(y^5\right)^{\frac{1}{5}}\left(z^{10}\right)^{\frac{1}{5}} = xyz^2$

iv) $\left(\frac{32x^{-6}y^{-4}z}{625x^4yz^{-4}}\right)^{\frac{2}{5}}$

$\left(\frac{32x^{-6}y^{-4}z}{625x^4yz^{-4}}\right)^{\frac{2}{5}} = \left(\left(\frac{2^5}{5^4}\right)x^{-6}.x^{-4}.y^{-4}.y^{-1}.z^1.z^4\right)^{\frac{2}{5}}$

$= \left(\frac{2^5}{5^4}.x^{-6-4}y^{-4-1}z^{1+4}\right)^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{2^5}{5^4}x^{-10}y^{-5}z^5\right)^{\frac{2}{5}} = \frac{\left(2^5\right)^{\frac{2}{5}}}{\left(5^4\right)^{\frac{2}{5}}}\left(x^{-10}\right)^{\frac{2}{5}}\left(y^{-5}\right)^{\frac{2}{5}}\left(z^5\right)^{\frac{2}{5}}$

$= \frac{2^2}{5^{\frac{8}{5}}}(x)^{-4}(y)^{-2}(z)^2 = \frac{4z^2}{5^{\frac{5}{5}} \times 5^{\frac{3}{5}}x^4y^2} = \frac{4z^2}{5 \times 5^{\frac{3}{5}}x^4y^2}$

-4 $\sqrt{\frac{(216)^{\frac{2}{3}} \times (25)^{\frac{1}{2}}}{(0.04)^{-3/2}}}$ کو مختصر کیجیے۔

حل: $\sqrt{\frac{(216)^{\frac{2}{3}} \times (25)^{\frac{1}{2}}}{(0.04)^{-3/2}}} = \sqrt{\frac{\left(2^3 \times 3^3\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(5^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{4}{100}\right)^{-\frac{3}{2}}}} = \sqrt{\frac{\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(5^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}}}$

$$=\left(\frac{2^2\times3^2\times5^1}{(25)^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2^2\times3^2\times5^1}{(5^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{2^2\times3^2\times5^1}{5^3}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2^2\times3^2}{5^{3-1}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{2^2\times3^2}{5^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{(2^2)^{\frac{1}{2}}\times(3^2)^{\frac{1}{2}}}{(5^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2\times3}{5}=\frac{6}{5}$$

-5 $\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{p+q}\cdot\left(\frac{a^q}{a^r}\right)^{q+r}\div5(a^p.a^r)^{p-r}, a\neq0$ کو مختصر کریں۔

حل:

$$\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{p+q}\cdot\left(\frac{a^q}{a^r}\right)^{q-r}\div5(a^p.a^r)^{p-r}$$

$$=(a^p.a^{-q})^{p+q}.(a^q.a^{-r})^{q-r}\div5(a^{p+r})^{p-r}=(a^{p-q})^{p+q}.(a^{q-r})^{q-r}\div5a^{p^2-r^2}$$

$$=a^{p2-q2}.a^{q^2-r^2}\times\frac{1}{5}a^{-p^2+r^2}=\frac{1}{5}a^o=\frac{1}{5}(1)=\frac{1}{5}$$

-6 $\left(\frac{a^{2l}}{a^{l+m}}\right)\left(\frac{a^{2m}}{a^{m+n}}\right)\left(\frac{a^{2n}}{a^{n+l}}\right)$ کو مختصر کریں۔

حل:

$$\left(\frac{a^{2l}}{a^{l+m}}\right)\left(\frac{a^{2m}}{a^{m-n}}\right)\left(\frac{a^{2n}}{a^{n-l}}\right)=(a^{2l}.a^{-l-m})(a^{2m}.a^{-m-n})(a^{2n}.a^{-n-l})$$

$$=(a^{2l-l-m})(a^{2m-m-n})(a^{2n-n-l})$$

$$=(a^{l-m})(a^{m-n})(a^{n-l})=a^{l-m+m-n+n-l}=a^o=1$$

-7 $\sqrt[3]{\frac{a^l}{a^m}}\times\sqrt[3]{\frac{a^m}{a^n}}\times\sqrt[3]{\frac{a^n}{a^l}}$ کو مختصر کریں۔

حل:

$$\sqrt[3]{\frac{a^l}{a^m}}\times\sqrt[3]{\frac{a^m}{a^n}}\times\sqrt[3]{\frac{a^n}{a^l}}$$

$$=\left(\frac{a^l}{a^m}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(\frac{a^m}{a^n}\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(\frac{a^n}{a^l}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=(a^l.a^{-m})^{\frac{1}{3}}\times(a^m.a^{-n})^{\frac{1}{3}}\times(a^n.a^{-l})^{\frac{1}{3}}$$

$$=(a^{l-m})^{\frac{1}{3}}\times(a^{m-n})^{\frac{1}{3}}\times(a^{n-l})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}(l-m)}\times a^{\frac{1}{3}(m-n)}\times a^{\frac{1}{3}(n-l)}$$

$$=a^{\frac{1}{3}(l-m)+\frac{1}{3}(m-n)+\frac{1}{3}(n-l)}=a^{\frac{1}{3}(l-m+m-n+n-l)}=a^{\frac{1}{3}(0)}=a^o=1$$

خلاصہ

☆ تمام حقیقی اعداد کا سیٹ $R = Q \cup Q'$ ہے۔ جب کہ $Q = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p, q \in Z \wedge q \neq 0 \right\}$ اور

$$Q' = \left\{ x \mid x \neq \frac{p}{q} \wedge p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$$

☆ تمام حقیقی اعداد کے سیٹ R کی تمام جمعی اور ضربی خصوصیات:

(i) خاصیت بندش: $a + b \in R,\ ab \in R, \forall a, b \in R$

(ii) خاصیت تلازم: $(a+b)+c = a+(b+c),\ (ab)c = a(bc), \forall a, b, c \in R$

(iii) خاصیت مبادلہ: $a + b = b + a,\ ab = ba, \forall a, b \in R$

(iv) خاصیت ذاتی عنصر: $a + 0 = a = 0 + a, \forall a, \in R$ (جمعی)

$a.1 = a = 1 . a, \forall a \in R,$ (ضربی)

(v) خاصیت معکوس: $a + (-a) = 0 = (-a) + a, \forall a \in R,$ (جمعی)

$a.\frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a}.a, a \neq 0$ (ضربی)

(vi) خاصیت تقسیمی: $a(b + c) = ab + ac, \forall a, b, c \in R$

$(b + c) a = ba + ca$ (جمعی)

$a(b - c) = ab - ac,$

$(a - b)c = ac - bc$ (تفریقی)

☆ برابری کی خصوصیات:

(i) عکسی خاصیت $a = a, \forall a \in R$

(ii) تشاکل خاصیت $a = b \Rightarrow b = a, \forall a, b \in R$

(iii) متعدیت خاصیت $a = b, b = c \Rightarrow a = c \forall a, b, c \in R$

(iv) جمعی خاصیت $a = b \Rightarrow a + c = b + c$

(v) ضربی خاصیت $a = b \Rightarrow ac = bc$

(vi) تنسیخی خاصیت $ac = bc, c \neq 0 \Rightarrow a = b$

☆ ریڈیکل $\sqrt[n]{x}$ میں $\sqrt{\ }$ ریڈیکل کا نشان ہے، x ریڈیکنڈ ہے یا بیس اور n ریڈیکل کا انڈیکس ہے۔

☆ انڈیکس پاورز اور اس کے قوانین:

$(a^m)^n = a^{mn}, (ab)^n = a^n b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$

$a^m a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n, a \neq 0$

$a^0=1, a^{-n}=\frac{1}{a^n}, a \neq 0$

☆ کمپلیکس عدد $z = a + bi$ کو امیجری (imaginary) نمبر $i = \sqrt{-1}$, سے متعارف کرایا گیا جبکہ $a, b \in R$ اور $(z) = a$ حقیقی حصہ اور $(z) = b$ امیجری حصہ

☆ کمپلیکس عدد $z = a + bi$ کا کانجوگیٹ $\overline{z} = a - bi$ مانا جاتا ہے۔

معروضی سوالات

☆ درست جواب پر (✔) کا نشان لگائیں۔

-1 عدد کا تصور علم .... کی بنیاد ہے۔

(A) فزکس (B) جیومیٹری (C) سٹیٹس ٹکس (D) ریاضیات

-2 اعداد .... ,1,2,3,4 جو مختلف اشیا کی گنتی کرنے میں استعمال ہوتے ہیں .... کہلاتے ہیں۔

(A) مکمل اعداد (B) قدرتی اعداد (C) صحیح اعداد (D) حقیقی اعداد

-3 اگر قدرتی اعداد کے سیٹ میں نمبر 0 شامل کر لیا جائے تو سیٹ .... کا سیٹ کہلاتا ہے۔

(A) مکمل اعداد (B) قدرتی اعداد (C) صحیح اعداد (D) حقیقی اعداد

-4 سیٹ $Z = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$ بشمول مثبت قدرتی اعداد، منفی قدرتی اعداد اور '0' تمام ...... کا سیٹ کہلاتا ہے۔

(A) مکمل اعداد (B) قدرتی اعداد (C) صحیح اعداد (D) حقیقی اعداد

-5 ایسے اعداد جو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھے جا سکیں جبکہ $p, q \in z$ اور $q \neq 0$ .... کہلاتے ہیں۔

(A) ناطق اعداد (B) غیر ناطق اعداد (C) صحیح اعداد (D) حقیقی اعداد

-6 ایسے اعداد جو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں نہیں لکھے جا سکتے جبکہ $p, q \in z$ اور $q \neq 0$، کہلاتے ہیں۔

(A) ناطق اعداد (B) غیر ناطق اعداد (C) صحیح اعداد (D) حقیقی اعداد

-7 π .... عدد ہے۔

(A) ناطق (B) غیر ناطق (C) حقیقی (D) غیر حقیقی

-8 e .... عدد ہے۔

(A) ناطق (B) غیر ناطق (C) حقیقی (D) غیر حقیقی

-9 تمام ناطق اور غیر ناطق اعداد کا سیٹ .... کا سیٹ R جانا اور مانا جاتا ہے۔

(A) ناطق اعداد (B) غیر ناطق اعداد (C) حقیقی اعداد (D) غیر حقیقی اعداد

-10 $Q \cap Q' =$ ______

(A) O (B) ϕ (C) Z (D) R

-11 اگر P ایک مفرد عدد ہو تو $\sqrt{P}$ ایک عدد ہے۔

(A) غیر ناطق (B) حقیقی (C) غیر حقیقی (D) قدرتی

-12 اعشاری اعداد میں ناطق اعداد کی اقسام ہیں۔

(A) دو (B) تین (C) چھے (D) دس

-13 ایسے اعشاری اعداد ناطق ہوتے ہیں جن کے اعشاری اعداد کی تعداد گنتی میں لائی جا سکے۔ ایسے اعشاری اعداد کو کہا جاتا ہے۔

(A) اختتام پذیر اعشاری حقیقی اعداد (B) اختتام پذیر اعشاری ناطق اعداد

(C) غیر اختتام پذیر تکراری اعشاری اعداد (D) غیر اختتام پذیر اعشاری حقیقی اعداد

-14 ایسے اعشاری اعداد جو غیر اختتام پذیر ہوں جن میں اعشاری عدد یا اعداد کا ایک بلاک بار بار اعشاری حصہ میں دہرائے جا رہے ہوں ....کہلاتے ہیں۔

(A) اختتام پذیر اعشاری حقیقی اعداد (B) اختتام پذیر اعشاری ناطق اعداد

(C) تکراری اعشاری اعداد (D) غیر اختتام پذیر اعشاری حقیقی اعداد

-15 $0.\overline{25} =$ ________

(A) -0.25 (B) $0.252627......$ (C) 0.2525 (D) $0.2525........$

-16 اگر $a+b \in R$ ، $\forall a, b \in R$ ہو تو اسے کیا کہتے ہیں؟

(A) خاصیت بندش بلحاظ جمع (B) خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع

(C) خاصیت تلازم بلحاظ جمع (D) جمعی معکوس بلحاظ جمع

-17 اگر $a+0 = a = 0+a$ ، $\forall a \in R$ ہو تو اسے کہتے ہیں۔

(A) جمعی معکوس (B) ضربی معکوس (C) جمعی ذاتی عنصر (D) ضربی ذاتی عنصر

-18 اگر $a+(-a) = 0 = (-a)+a \; \forall a \in R$ ہو تو اسے کہتے ہیں۔

(A) جمعی معکوس (B) ضربی معکوس (C) جمعی ذاتی عنصر (D) ضربی ذاتی عنصر

-19 اگر $a.1 = a = 1.a$ ، $\forall a \in R$ ہو تو اسے کہتے ہیں۔

(A) جمعی معکوس (B) ضربی معکوس (C) جمعی ذاتی عنصر (D) ضربی ذاتی عنصر

-20 علامت $\forall$ کے معنی ہیں۔

(A) جبکہ (B) نتیجہ (C) سب کے لیے (D) صرف

-21 ریڈیکل کا نشان ہے۔

(A) $\sqrt{\ }$ (B) $\Rightarrow$ (C) $\frac{\sqrt{\ }}{2}$ (D) $\forall$

-22 $\sqrt[2]{a}$ کو عام طور پر..................لکھا جاتا ہے۔

(A) $\sqrt{2a}$ (B) $\sqrt{a}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt[a]{2}$

-23 $\sqrt[n]{a^m} =$ ________

(A) $\sqrt[n]{a^m}.\sqrt[n]{a^n}$ (B) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (C) $\sqrt[mn]{a}$ (D) a

-24 "a^n" میں a ہے۔

(A) قوت نما (B) اساس (C) عددی سر (D) ان میں سے کوئی بھی نہیں

-25 $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} =$ ؟

(A) 0 (B) x (C) 1 (D) a

-26 $(x^3)^2 =$ ؟

(A) x^6 (B) x^5 (C) x^8 (D) x^9

-27 $i =$ ______ ہوتا ہے:

(A) $\sqrt{\ }$ (B) $\sqrt{1}$ (C) $\sqrt{-1}$ (D) $\sqrt{2}$

-28 $i^2 =$ ______ ہوتا ہے:

(A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) $\sqrt{-1}$

-29 $-4-i$ کا کانجوگیٹ .... ہے۔

(A) $4-i$ (B) $4+i$ (C) $-4+i$ (D) $-i-4$

-30 $i^{30} =$ ....

(A) 1 (B) -1 (C) i (D) $-i$

-31 .... کے ریاضی دان لیونارڈ آئلر نے پہلی بار $i=\sqrt{-1}$ کو عدد کے طور پر پیش کیا۔

(A) امریکہ (B) لندن (C) سوئٹزر لینڈ (D) انگلینڈ

-32 ہر حقیقی نمبر ایک .... ہے۔

(A) ناطق عدد (B) مثبت صحیح عدد (C) کمپلیکس عدد (D) منفی صحیح عدد

-33 $a^m.a^n =$ ....

(A) a^{m-n} (B) a^{m^2} (C) a^{m+n} (D) $a^{m/n}$

-34 $a^0 =$ ....

(A) 0 (B) a (C) 1 (D) 0^a

-35 $(a^{-1})^{-1} =$ ؟

(A) 0 (B) a (C) 1 (D) a^{-1}

-36 غیر مربعی مثبت صحیح اعداد کا جذر .... عدد ہوتا ہے۔

(A) ناطق (B) غیر ناطق (C) حقیقی (D) قدرتی

-37 $Q \cup Q' =$ ؟

(A) N (B) W (C) Z (D) R

-38 $\left\{\frac{p}{q} \mid p,q \in Z \wedge q \neq 0\right\} =$ ؟

(A) Q (B) Q' (C) Z (D) R

39- $0.\overline{3}$ = ________

(A) 0.33 (B) 0.345....... (C) 0.333....... (D) 0.456........

40- سوئٹزر لینڈ کے ریاضی دان................نے پہلی دفعہ $i = \sqrt{-1}$ کو عدد کے طور پر پیش کیا۔

(A) لیونارڈ آئلر (B) آرتھر کیلے (C) آئزک نیوٹن (D) مادام کیوری

جوابات:

1- ریاضیات	2- قدرتی اعداد	3- مکمل اعداد	4- صحیح اعداد
5- ناطق اعداد	6- غیر ناطق اعداد	7- غیر ناطق	8- غیر ناطق
9- حقیقی اعداد	10- ϕ	11- غیر ناطق	12- دو
13- اختتام پذیر یا عشاری ناطق اعداد	14- تکراری اعشاری اعداد	15- 0.2525........	16- خاصیت بندش بلحاظ جمع
17- جمعی ذاتی عنصر	18- جمعی معکوس	19- ضربی ذاتی عنصر	20- سب کے لیے
21- $\sqrt{\ }$	22- $\sqrt{a}$	23- a	24- اساس
25- 1	26- x^6	27- $\sqrt{-1}$	28- -1
29- $-4+i$	30- -1	31- سوئٹزر لینڈ	32- کمپلیکس نمبر
33- a^{m+n}	34- 1	35- a	36- غیر ناطق
37- R	38- Q	39- 0.333.......	40- لیونارڈ آئلر

☆ سوالات کے مختصر جوابات تحریر کریں۔

1- عدد کا تصور کس علم کی بنیاد ہے؟

جواب: عدد کا تصور علم ریاضیات کی بنیاد ہے۔

2- قدرتی اعداد کیا ہوتے ہیں؟

جواب: اعداد ....,1,2,3,4 جو مختلف اشیا کی گنتی کرنے میں استعمال ہوتے ہیں قدرتی اعداد کہلاتے ہیں۔ سیٹ N جس میں تمام قدرتی اعداد شامل ہوتے ہیں یوں ظاہر کیا جاتا ہے۔ جیسا کہ $N = \{1,2,3,...............\}$

3- مکمل اعداد کی تعریف کریں۔

جواب: اگر سیٹ N میں نمبر 0 شامل کر لیا جائے تو سیٹ $W = \{0,1,2,3,..........\}$ مکمل اعداد کا سیٹ کہلاتا ہے۔

4- صحیح اعداد کی تعریف کریں۔

جواب: سیٹ $Z=\{....,-3,-2,-1,0,1,2,3.....\}$ بشمول مثبت قدرتی اعداد، منفی قدرتی اعداد اور '0' تمام صحیح اعداد کا سیٹ کہلاتا ہے۔

5- ناطق اعداد کی تعریف کریں۔

جواب: ایسے اعداد جو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھے جا سکیں جبکہ p اور q دونوں صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$ ناطق اعداد کہلاتے ہیں۔ تمام ناطق اعداد کے سیٹ کو Q سے ظاہر کرتے ہیں۔ جیسا کہ: $Q=\left\{\frac{p}{q} | p,q \in Z \wedge q \neq 0\right\}$

6- غیر ناطق اعداد کی تعریف کریں۔

جواب: ایسے اعداد جو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں نہیں لکھے جا سکتے جبکہ p اور q دو صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$ غیر ناطق اعداد کہلاتے ہیں۔ تمام غیر ناطق اعداد کے سیٹ کو Q' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جیسا کہ: $Q'=\left\{x / x \neq \frac{p}{q} | p,q \in Z \wedge q \neq 0\right\}$

7- غیر ناطق اعداد کی مثالیں دیں۔

جواب: $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، π اور e تمام غیر ناطق اعداد ہیں۔

8- حقیقی اعداد کا سیٹ کیا ہوتا ہے؟

جواب: تمام ناطق اور غیر ناطق اعداد کا سیٹ حقیقی اعداد کا سیٹ R جانا اور مانا جاتا ہے۔

پس $R = Q \cup Q'$

9- اعشاری اعداد میں ناطق اعداد کی کتنی اقسام ہیں؟ نام لکھیں۔

جواب: اعشاری اعداد میں ناطق اعداد دو قسم کے ہیں۔

1- اختتام پذیر اعشاری 2- غیر اختتام پذیر تکراری

10- اختتام پذیر اعشاری ناطق اعداد کیا ہوتے ہیں؟

جواب: ایسے اعشاری اعداد ناطق ہوتے ہیں جن کے اعشاری اعداد کی تعداد گنتی میں لائی جا سکے۔ ایسے اعشاری اعداد کو اختتام پذیر اعشاری ناطق اعداد کہا جاتا ہے۔

11- اختتام پذیر اعشاری ناطق اعداد کی دو مثالیں دیں۔

جواب: مثال کے طور پر $\frac{2}{5} = 0.4$ اور $\frac{3}{8} = 0.375$ اختتام پذیر اعشاری ناطق اعداد ہیں۔

12- غیر اختتام پذیر تکراری اعشاری اعداد کیا ہوتے ہیں؟

جواب: ایسے اعشاری اعداد جو غیر اختتام پذیر ہوں جن میں اعشاری عدد یا اعداد کا ایک بلاک بار بار اعشاری حصہ میں دہرائے جا رہے ہوں تکراری اعشاری اعداد کہلاتے ہیں۔

13- غیر اختتام پذیر اعشاری ناطق اعداد کی دو مثالیں دیں۔

جواب: $\frac{2}{9} = 0.2222........$ اور $\frac{4}{11} = 0.363636........$ تکراری غیر اختتام پذیر اعشاری ناطق اعداد ہیں۔

14- $0.2\overline{3}$ کا کیا مطلب ہے؟

جواب: $0.2\overline{3} = 0.232323..........$

15- حقیقی اعداد کی خاصیت بندش بلحاظ جمع درج کریں۔

جواب: خاصیت بندش $\forall a,b \in R \;,\; a+b \in R$

16- حقیقی اعداد کی خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع درج کریں۔

جواب: خاصیت مبادلہ $a+b=b+a \;،\; \forall a,b \in R$

17- حقیقی اعداد کی خاصیت تلازم بلحاظ جمع درج کریں۔

جواب: خاصیت تلازم $(a+b)+c=a+(b+c),\ \forall a,b,c\in R$

18- حقیقی اعداد کا جمعی ذاتی عنصر درج کریں۔

جواب: جمعی ذاتی عنصر: حقیقی اعداد کے سیٹ R میں ایک اور صرف ایک رکن 0 موجود ہے جو جمعی ذاتی عنصر کہلاتا ہے۔ جیسا کہ:

$$a+0=a=0+a,\ \forall a\in R$$

19- حقیقی اعداد کا جمعی معکوس کیا ہوتا ہے؟

جواب: جمعی معکوس: حقیقی اعداد کے سیٹ R میں ہر رکن a کا ایک اور صرف ایک ہی جمعی معکوس a- موجود ہے جیسا کہ

$$a+(-a)=0=(-a)+a$$

20- حقیقی اعداد کی خاصیت بندش بلحاظ ضرب درج کریں۔

جواب: خاصیت بندش: $ab\in R,\ \forall a,b\in R$

21- حقیقی اعداد کی خاصیت مبادلہ بلحاظ ضرب درج کریں۔

جواب: خاصیت مبادلہ: $ab=ba,\ \forall a,b\in R$

22- حقیقی اعداد کی خاصیت تلازم بلحاظ ضرب تحریر کریں۔

جواب: خاصیت تلازم $(ab)c=a(bc),\ \forall a,b,c\in R$

23- حقیقی اعداد کا ضربی ذاتی عنصر کیا ہوتا ہے؟

جواب: حقیقی اعداد کے سیٹ R میں ایک اور صرف ایک ہی حقیقی عدد 1 موجود ہے جو ضربی ذاتی عنصر کہلاتا ہے۔ جبکہ

$$a.1=a=1.a,\ \forall a\in R$$

24- حقیقی اعداد کا ضربی معکوس کیا ہوتا ہے؟

جواب: سیٹ R میں ہر حقیقی عدد $(a\neq 0)$ کا ضربی معکوس ایک اور صرف ایک نمبر $\frac{1}{a}=a^{-1}$ موجود ہے جس کو a کا ضربی معکوس کہا جاتا ہے۔ $aa^{-1}=1=a^{-1}a$

25- بایاں تقسیمی قانون بلحاظ جمع کیا ہے؟

جواب: $\forall a,b,c\in R$

$a(b+c)=ab+ac$ (بایاں تقسیمی قانون بلحاظ جمع)

26- دایاں تقسیمی قانون بلحاظ جمع کیا ہے؟

جواب: $\forall a,b,c\in R$

$(a+b)c=ac+bc$ (دایاں تقسیمی قانون بلحاظ جمع)

27- بایاں تقسیمی قانون بلحاظ تفریق کیا ہے؟

جواب: $\forall a,b,c\in R$

$a(b-c)=ab-ac$ (بایاں تقسیمی قانون بلحاظ تفریق)

28- دایاں تقسیمی قانون بلحاظ تفریق کیا ہے؟

جواب: $\forall a,b,c\in R$

(دایاں تقسیمی قانون بلحاظ تفریق) $(a-b)\,c = ac - bc$

29- علامت $\forall$ کے کیا معنی ہیں؟

جواب: $\forall$ کے معنی ہیں "سب کے لیے۔"

30- حقیقی اعداد میں برابری کی عکسی خاصیت بیان کریں۔

جواب: عکسی خاصیت: $a = a \quad \forall a \in R$

31- حقیقی اعداد میں برابری کی تشاکل خاصیت بیان کریں۔

جواب: تشاکل خاصیت: $\forall a,b \in R \quad a = b \Rightarrow b = a$

32- حقیقی اعداد میں برابری کی متعدیت خاصیت بیان کریں۔

جواب: متعدیت خاصیت: $\forall a,b,c \in R \quad a = b\,,\, b = c \Rightarrow a = c$

33- حقیقی اعداد میں برابری کی جمعی خاصیت بیان کریں۔

جواب: جمعی خاصیت: $\forall a,b,c \in R \quad a = b \Rightarrow a + c = b + c$

34- حقیقی اعداد میں برابری کی ضربی خاصیت بیان کریں۔

جواب: ضربی خاصیت: $\forall a,b,c \in R \quad a = b \Rightarrow ac = bc$

35- حقیقی اعداد میں برابری کی تنسیخی خاصیت بلحاظ جمع بیان کریں۔

جواب: تنسیخی خاصیت بلحاظ جمع: $\forall a,b,c \in R \;,\; a + c = b + c \Rightarrow a = b$

36- حقیقی اعداد میں برابری کی تنسیخی خاصیت بلحاظ ضرب بیان کریں۔

جواب: تنسیخی خاصیت بلحاظ ضرب: $\forall a,b,c \in R \;,\; ac = bc \quad c \neq 0 \Rightarrow a = b$

37- حقیقی اعداد کی نابرابری کی ثلاثی خاصیت بیان کریں۔

جواب: ثلاثی خاصیت: $\forall a,b \in R$

$a < b$ یا $a = b$ یا $a > b$

38- حقیقی اعداد کی نابرابری کی متعدیت خاصیت بیان کریں۔

جواب: متعدیت خاصیت: $\forall a,b,c \in R$

(a) $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

(b) $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$

39- حقیقی اعداد کی نابرابری کی ضربی معکوس خاصیت بیان کریں۔

جواب: ضربی معکوس خاصیت: $\forall a,b \in R \wedge a \neq 0, b \neq 0$

(a) $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(b) $a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

40- ریڈیکلز اور ریڈیکنڈز کیا ہوتے ہیں؟

جواب: اگر n ایک مثبت صحیح عدد ہو جو صحیح عدد 1 سے بڑا ہو تو ایک حقیقی نمبر x جو حقیقی نمبر a کا nواں رُوٹ ہو ریڈیکل کہلاتا ہے۔

یعنی اگر $x^n = a$ ہو تو $x = \sqrt[n]{a}$ یا $x = (a)^{1/n}$ بطور علامت لکھا جاتا ہے۔ حقیقی نمبر a ریڈیکل نشان کے ساتھ ریڈیکنڈ یا ریڈیکل کی بنیاد کہلاتا ہے۔

41- ریڈیکل کا نشان اور انڈیکس کیا ہوتا ہے؟

جواب: ریڈیکل $\sqrt[n]{a}$ میں علامت $\sqrt{\ }$ ریڈیکل کا نشان کہلاتا ہے اور n کو ریڈیکل کا انڈیکس کہتے ہیں۔

42- قوت نمائی شکل کیا ہوتی ہے؟

جواب: قوت نمائی شکل میں ریڈیکل کی جگہ قوت نما استعمال کرتے ہیں۔

مثلاً $x = (a)^{1/n}$ ریڈیکل شکل $x = \sqrt[n]{a}$ کی قوت نمائی شکل ہے۔

43- ریڈیکلز کی خصوصیات تحریر کریں۔

جواب: اگر $a, b \in R$ اور n, m مثبت صحیح اعداد ہوں تو

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
4. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
5. $\sqrt[n]{a^n} = a$

44- اساس اور انڈیکس میں کیا فرق ہے؟

جواب: قوت نمائی شکل a^n میں ہم "a" کو اساس یا بنیاد اور n کو a کی قوت کا انڈیکس کہتے ہیں۔

45- مختصر کریں۔ $(216)^{\frac{2}{3}} \times (25)^{\frac{1}{2}}$

جواب:

$$(216)^{\frac{2}{3}} \times (25)^{\frac{1}{2}} = (2\times2\times2\times3\times3\times3)^{\frac{2}{3}} \times (5\times5)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (2^3\times3^3)^{\frac{2}{3}} \times (5^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2^{3\times\frac{2}{3}} \times 3^{3\times\frac{2}{3}} \times 5^{2\times\frac{1}{2}}$$

$$= 2^2 \times 3^2 \times 5$$

$$= 4 \times 9 \times 5 = 180$$

46- $(5^2)^4$ **کو حل کریں۔**

جواب:

$$= (5^2)^4 = 5^{2\times4} = 5^8$$

47- $\dfrac{a^{-2}.\,a^{-3}.\,b^7}{a^{-3}b^4}$ **کو مختصر کریں۔**

جواب:

$$= \frac{a^{-2}.\,a^{-3}.\,b^7}{a^{-3}b^4} = \frac{a^{-5}.b^7}{a^{-3}.b^4} = \frac{b^{7-4}}{a^{-3+5}} = \frac{b^3}{a^2}$$

48- غیر حقیقی عدد کی تعریف کریں۔ مثال بھی دیں۔

جواب: ایک عدد $z = a + bi$ جس میں $a, b \in R$ اور $i = \sqrt{-1}$ ایک کمپلیکس (غیر حقیقی) عدد کہلاتا ہے اور انگریزی حروف تہجی کے حرف "z" سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثلاً $z = 2+3i$ ایک غیر حقیقی عدد ہے۔

49- غیر حقیقی اعداد کا سیٹ لکھیں۔

جواب: تمام غیر حقیقی اعداد کا سیٹ انگریزی کے حرف C سے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی

$$C = \{z \mid z = a + bi\ ,\ a,b \in R, i = \sqrt{-1}\}$$

50- غیر حقیقی اعداد کا کانجوگیٹ کیا ہوتا ہے؟

جواب: اگر ہم غیر حقیقی عدد $a+bi$ = میں i کو $-i$ میں بدل دیں تو نیا غیر حقیقی عدد $a-bi$ غیر حقیقی عدد z کا کانجوگیٹ کہلاتا ہے جو $\overline{z}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

51- i^{16} کی قیمت معلوم کریں۔

جواب: $i^{16} = (i^2)^8 = (-1)^8 = 1 \ (\because i^2 = -1)$

52- i^9 کی قیمت معلوم کریں۔

جواب:

$$i^9 = i^8 . i$$
$$= (i^2)^4 . i \qquad \because i^2 = -1$$
$$= (-1)^4 . i$$
$$= i$$

53- $2 - 5i$ کا کانجوگیٹ لکھیں۔

جواب: $2 - 5i$ کا کانجوگیٹ $2 + 5i$ ہے۔

54- عدد $-5i$ کا حقیقی اور امیجری حصہ لکھیے۔

جواب: فرض کیا $z = -5i$

تو $Re(z) = 0$

$Im(z) = -5$

55- مندرجہ ذیل غیر حقیقی اعداد کو $a+bi$ کی شکل میں حاصل کریں۔ $(3+4i) + (7+3i)$

جواب:

$$(3+4i) + (7+3i)$$
$$= (3+4i) + (7+3i)$$
$$= (3+7 + (+4+3)i$$
$$= 10 + 7i$$

56- مندرجہ ذیل غیر حقیقی اعداد کو $a + bi$ کی شکل میں حاصل کریں۔ $(-2+5i) - (3+i)$

جواب:

$$(-2+5i) - (3+i)$$
$$= (-2+5i) - (3+i)$$
$$= (-2 -3) + (5-1)i$$
$$= -5 + 4i$$

57- $a + bi$ کی شکل میں مختصر کریں۔ $(3 - 5i)\ \overline{(7 - 3i)}$

جواب:

$$(3 - 5i)\ \overline{(7 -3i)}$$
$$= (3 - 5i)\ (7+ 3i)$$
$$= (3)(7) - (5i)\ (3i) + (3)(3i) + (-5i)(7)$$
$$= 21 - 15i^2 + 9i - 35i$$

$$= 21 - 15(-1) + 9i - 35i \qquad (\because i^2 = -1)$$
$$= 21 + 15 - 26i$$
$$= 36 - 26i$$

-58 $\frac{1}{2+i}$ کو $a + bi$ کی شکل میں مختصر کریں۔

جواب:

$$\frac{1}{2+i} = \frac{1}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{(2)^2-(i)^2}$$
$$= \frac{2-i}{4-i^2} \qquad \because i^2 = -1$$
$$= \frac{2-i}{4-(-1)} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

-59 اگر $z = 3 + i$ ہو تو $z + \overline{z}$ کی قیمت معلوم کریں۔

جواب:

$$z = 3 + i$$
$$\overline{z} = 3 - i$$
$$z + \overline{z} = 3 + i + 3 - i$$
$$= (3 + 3) + (1 - 1)i$$
$$= 6 + 0i$$
$$= 6$$

-60 اگر $x = 3 + 5i$ اور $y = 7 - 4i$ تو تصدیق کریں کہ: $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$

جواب:

L.H.S. = $\overline{x + y}$

$x = 3 + 5i$

$y = 7 - 4i$

$x+y = (3+5i) + (7-4i)$

$= (3+7) + (5-4)i$

$x+y = 10 + i$

$\overline{x+y} = \overline{10+i}$

$\overline{x+y} = 10 - i$

R.H.S. = $\overline{x} + \overline{y}$

$x = 3 + 5i$

$y = 7 - 4i$

$\overline{x} = 3 - 5i$

$\overline{y} = 7 + 4i$

$\overline{x} + \overline{y} = (3-5i) + (7+4i)$

$\overline{x} + \overline{y} = (3+7) + (-5+4)i$

$\overline{x} + \overline{y} = 10 - i$

L.H.S. = R.H.S.

پس ثابت ہوا کہ $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$

****